**Вопрос 28**

Общее решение yОН линейного неоднородного дифференциального уравнения L(y)=b(x) есть сумма общего решения yОО соответствующего однородного уравнения L(y) = 0 и какого - либо частного решения yЧН исходного неоднородного уравнения. Для уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида это частное решение может быть найдено достаточно просто.

Функцию C:\Users\Владимир\Desktop\d1_image045.gif, где Pj(x) - некоторые полиномы (многочлены), назовём квазиполиномом. По теореме о наложении решений, если yj , j=1,2,..,m - решения уравнений L(y) = bj(x), тоC:\Users\Владимир\Desktop\d1_image046.gifесть решение уравненияC:\Users\Владимир\Desktop\d1_image047.gif. Поэтому, не умаляя общности, будем считать, что правая часть уравнения L(y) = b(x) с постоянными коэффициентами имеет вид b(x) = P(x)eλx. В частности, если λ=α+βi - комплексное число, то наиболее общей правой частью указанного типа является функцияC:\Users\Владимир\Desktop\d1_image048.gif (1)

у которой P(x)и Q(x)- некоторые полиномы. Справедлив следующий результат.

Теорема. Линейное дифференциальное уравнение

C:\Users\Владимир\Desktop\d1_image049.gif

с постоянными коэффициентами и правой частью вида (1) имеет частное решение C:\Users\Владимир\Desktop\d1_image050.gif ,где k - кратность корня α+βi характеристического полинома соответствующего однородного уравнения, R(x) , S(x) - полиномы, подлежащие определению, степень которых равна максимальной степени полиномов P(x) , Q(x).

**Метод подбора частного решения неоднородного уравнения с правой частью специального вида.**

Методом Лагранжа может быть решено любое неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Однако если свободный член в уравнении имеет вид C:\Users\Владимир\Desktop\Image1481.gif где Pm1(x) и Qm2(x) - многочлены степеней, соответственно, m1 и m2, можно сразу указать вид частного решения в форме с неопределёнными коэффициентами. Общее правило таково: составим из коэффициентов при x в экспоненте и тригонометрических функциях числоC:\Users\Владимир\Desktop\Image1484.gifи пусть r - кратность числа s0 как корня характеристического уравнения, m = max(m1, m2). Тогда частное решение надо искать в видеC:\Users\Владимир\Desktop\Image1485.gifгде Rm(x) и Sm(x) - многочлены степени m с неопределёнными коэффициентами. Дифференцируя функцию yчн n раз, подставив эти производные в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и одинаковых тригонометрических функциях (sin x или cos x), получим систему из 2(m + 1) уравнений относительно 2(m + 1) неопределённых коэффициентов многочленов Rm(x) и Sm(x). Решив эту систему, определим коэффициенты функции yчн(x).

Если f(x) = Pm(x) (т.е. f(x) - многочлен степени m), то частное решение ищется в виде yчн(x)= Rm(x), если число 0 не является корнем характеристического уравнения, и в виде yчн(x)= xr Rm(x), если число 0 - корень характеристического уравнения кратности r. Rm(x) - многочлен степени m с неопределёнными коэффициентами.

Это правило следует из общего, если записать f(x) = Pm(x) в виде f(x) = e0 x [Pm(x) cos 0x + 0 sin 0x]. В этом случае s0 = 0 + 0i, m1 = m, m2 = 0, max(m1, m2) = m, поэтому

yчн(x)= xr e0 x [Rm(x) cos 0x + Sm(x) sin 0x] = xr Rm(x) .